



Modélisation des plis dans les membranes

Adama Diaby, Anh Le Van, Christian Wielgosz

► To cite this version:

Adama Diaby, Anh Le Van, Christian Wielgosz. Modélisation des plis dans les membranes. 7e Colloque National de Calcul des Structures, CSMA, 2005, Giens, France. hal-01008470

HAL Id: hal-01008470

<https://hal.science/hal-01008470>

Submitted on 9 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution| 4.0 International License

Modélisation des plis dans les membranes

Adama Diaby — Anh Le van — Christian Wielgosz

GéM - Faculté des Sciences de Nantes, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, Nantes 44322 cedex 3, France.

adama.diaby@univ-nantes.fr, anh.le-van@univ-nantes.fr,
christian.wielgosz@univ-nantes.fr

RÉSUMÉ. Cet article traite de la présence des plis dans les membranes à travers une formulation lagrangienne totale. Le comportement de la structure est modélisé par une loi hyperélastique et les éléments finis utilisés sont des quadrilatères à 8 nœuds ou des triangles à 6 nœuds, sans rigidité à la flexion. La mise en évidence des plis se fait en utilisant le calcul de la bifurcation, sans avoir recours aux imperfections dans la structure. La méthode standard de longueur d'arc sphérique est modifiée au moyen d'un procédé spécifique, pour faire face à l'apparition des racines complexes dans l'équation quadratique. L'application de la formulation proposée à un ensemble d'exemples numériques typiques montre sa capacité à prévoir correctement la présence des plis dans les membranes.

ABSTRACT. The problem of the wrinkling of the membranes is described in this paper within the total Lagrangian formulation. The membrane material obeys a prestressed hyperelastic constitutive equation and the finite elements are a 8-node quadrilateral and a 6-node triangular membrane element without flexural stiffness. The appearance of wrinkles in the membranes is treated by the bifurcation analysis without using any imperfection in the structure. The standard spherical arclength method is modified by means of a specific solution procedure to cope with the occurrence of complex roots when solving the quadratic constraint equation. Applying the proposed formulation to a set of typical numerical examples shows its ability to correctly predict the wrinkling behaviour in membranes structures.

MOTS-CLÉS : éléments finis, membranes, hyperélasticité, bifurcation, plis.

KEYWORDS: finite element, membranes, hyperelasticity, bifurcation, wrinkling.

1. Introduction

Les plis apparaissent à cause d'un flambement local dans les régions qui développent des contraintes compressives. Il est alors sensé d'étudier les plis dans les membranes en employant la théorie de la bifurcation. Notre étude entre ainsi dans la lignée de celle faite par Miyumura [MIY 00] : théorie de la bifurcation pour l'étude des plis dans les membranes combinée à l'élément fini membrane sans rigidité à la flexion.

En matière de plis, la théorie standard de longueur d'arc sphérique [CRI 91] ne peut s'appliquer telle quelle, à cause des racines complexes qui apparaissent de manière récurrente dans l'équation du second degré de base et qui rendent la convergence extrêmement problématique. Nous avons résolu cette difficulté en greffant dans l'algorithme de calcul une reformulation de la longueur d'arc sphérique due à Lam et Morley [LAM 92].

2. Méthode de résolution et traitement de la bifurcation

D'un point de vue numérique, il est essentiel que la formulation des éléments finis inclut la pression comme une force suiveuse et les grands déplacements, pour pouvoir correctement modéliser les plis dans les structures sous pression.

L'élément membrane développé utilise une formulation lagrangienne totale avec une rigidité à la flexion nulle, et satisfait à la condition de contrainte plane. Le matériau est considéré hyperélastique, isotrope et compressible, obéissant au modèle de St Venant Kirchhoff, caractérisé par les coefficients E (module d'Young) et ν (coefficient de Poisson).

Dans le contrôle en longueur d'arc classique, on se ramène à résoudre une équation quadratique en $\Delta\lambda$, où λ est le facteur de charge [CRI 91]. Très souvent, dans les problèmes où les plis apparaissent, il s'avère que cette équation présente des racines complexes. Une méthode efficace pour surpasser cette difficulté est proposée par Lam et Morley [LAM 92], elle consiste à projeter le résidu sur le vecteur force externe. A l'itération où apparaissent les racines complexes, le résidu est décomposé en une composante selon la direction de la force et en une autre selon la perpendiculaire à cette force. C'est la composante selon la perpendiculaire à la force qui est responsable de la présence des racines complexes et doit être éliminée.

La détection des points critiques se fait en se basant sur la singularité de la matrice raideur \mathbf{K} et en comptant les pivot négatifs de la matrice \mathbf{D} , où \mathbf{K} est décomposé selon la méthode de Crout $\mathbf{K}=\mathbf{LDL}^T$. On isole chaque point critique pour déterminer sa nature : point limite ou point de bifurcation. Dans le cas d'un point de bifurcation, le branchement sur la branche bifurquée s'effectue par la

technique d'injection des modes propres [SHI 96a et b]. Le vecteur propre \mathbf{Z} est pris comme nouveau prédicteur pour déterminer l'incrément en déplacement $\Delta \mathbf{u}$:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{pred}} = \pm \Delta \ell \mathbf{Z} \quad [1]$$

En couplant le traitement de la bifurcation avec le traitement des racines complexes de Lam et Morley, nous arrivons à simuler avec succès l'apparition et l'évolution des plis dans les membranes, comme montrent les exemples numériques proposés dans la suite.

3. Exemples numériques

3.1. *Hémisphère pincé*

Le premier exemple traité porte sur un hémisphère, de rayon R et d'épaisseur h , gonflé puis appuyé en son pôle par une force verticale. A cause de la symétrie de l'hémisphère, seulement le quart de celui-ci est modélisée avec 25×25 éléments.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont : $R = 15,5 \text{ cm}$, $h = 25 \text{ } \mu\text{m}$, $R/h = 6102$, $E = 270 \text{ Mpa}$, $\nu = 0,4$.

Le chargement est appliqué en deux étapes : d'abord la membrane est gonflée jusqu'à une pression donnée, et ensuite on applique une force verticale en son pôle. La figure 1.a présente la déformée de la membrane pour une pression de $p = 120 \text{ Pa}$ [SZY 87] et la figure 1.b pour une pression de $p = 5000 \text{ Pa}$ [STA 03].

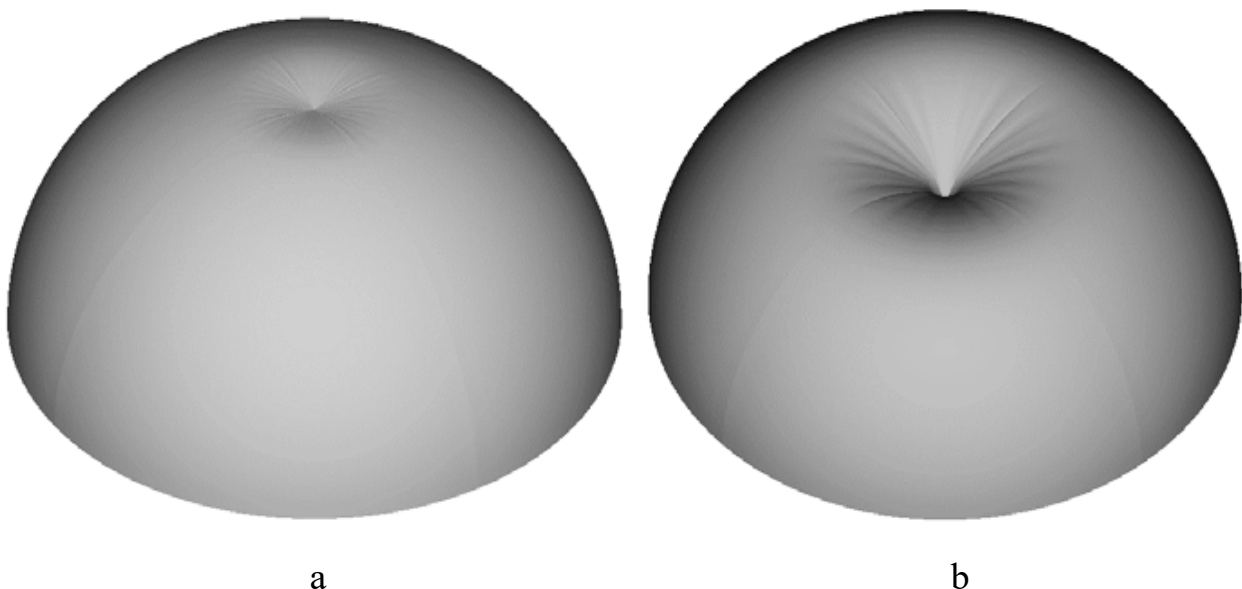


Figure 1. *Déformée de l'hémisphère pincé : (a) $p = 120 \text{ Pa}$; (b) $p = 5000 \text{ Pa}$.*

Dans les deux cas, on constate que les plis sont distribués régulièrement autour du point d'application de la force. Pour la pression basse de 120 Pa, les plis sont très fins, ce qui est en accord avec [SZY 87]. Alors que pour la pression élevée de $p = 5000$ Pa, les plis sont plus accentués et donc plus visibles, comme dans [STA 03].

3.2. Membrane cisailée

Le second exemple présenté est celui de la membrane carrée, fixée sur un côté et cisailée sur le côté opposé. Dans la configuration de initiale, la membrane a une longueur de 25 cm et une épaisseur de 25 μm . Les propriétés matérielles sont $E = 2500$ MPa et $\nu = 0,34$. Ici, un pilotage de la longueur d'arc en force sur la membrane cisailée entraîne de sérieux problèmes de convergence et doit être remplacé par un pilotage en déplacement. En se basant sur la formulation déplacement de la longueur d'arc, on arrive à simuler assez facilement les plis. La déformée de la membrane cisailée est présentée sur la figure 2. Cette déformée est très proche de celle proposée par Tessler [TES 03] : selon la diagonale on observe la présence de 4 gros plis, et de 2 petits plis à peine perceptibles.

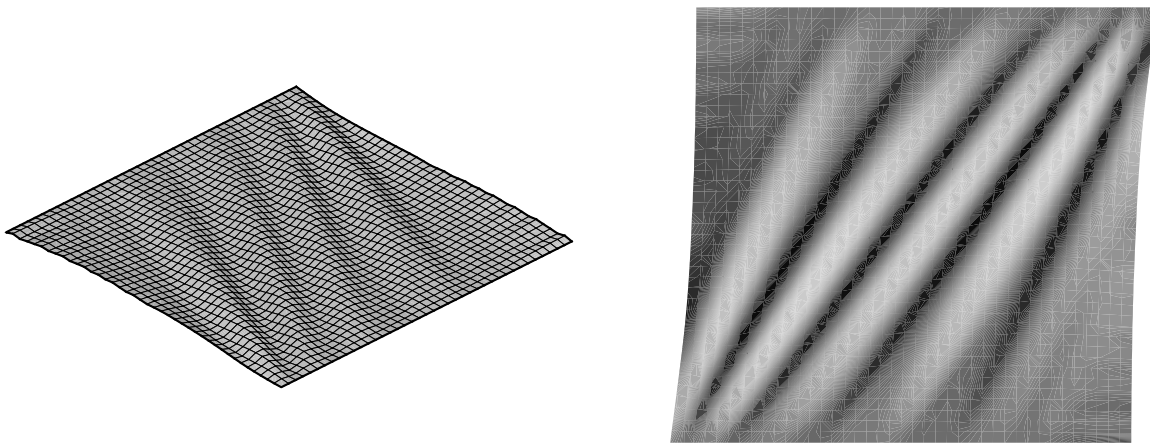


Figure 2. *Déformée d'une membrane cisailée.*

3.3. Airbag

Le dernier exemple traité est la modélisation des plis dans un airbag carré. Les propriétés matérielles et géométriques du airbag sont celles utilisées par Contri [CON 88] : module d'Young, $E = 588 \text{ MPa}$, coefficient de Poisson, $\nu = 0,4$, épaisseur de la membrane, $h = 0,1 \text{ mm}$ et la diagonale du airbag est 120 cm . La structure est discrétisée avec 25×25 éléments. La pression $p = 5000 \text{ Pa}$. Dans la configuration de référence, l'airbag se trouve dans un plan. Sous l'effet d'une pression interne, l'airbag se déforme en prenant des flèches hors plan, alors que ses côtés se déplacent *librement* dans le plan initial. Le résultat obtenu est montré sur la figure 3 ci-dessous.

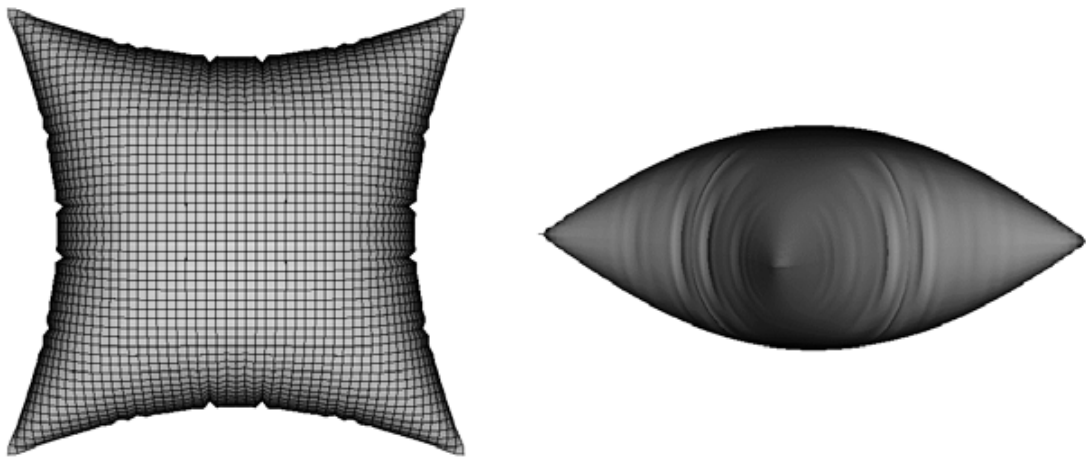


Figure 3. Déformée du airbag avec $25 \Delta 25$ éléments.

On retrouve deux plis prononcés sur les côtés comme envisagés par Stanuszeck [STA 03], ainsi que de petits plis comme montre l'expérience de Contri [CON 88].

4. Conclusion

L'objectif de cet article est de proposer un outil numérique pour étudier l'apparition et l'évolution des plis dans les membranes, l'apparition étant calculé par la théorie de la bifurcation pure sans ajout d'imperfections. A cette fin, un élément fini membrane sans rigidité à la flexion a été développé. Les exemples sélectionnés ont montré la capacité de notre formulation à prédire les régions de plis dans la membrane. Une technique simple proposée par Lam et Morley [LAM 92] a été incorporée dans le schéma de calcul pour traiter l'apparition éventuelle de racines complexes lorsqu'on résout l'équation quadratique de la méthode standard de longueur d'arc sphérique.

5. Bibliographie

- [CON 88] Contri P., Schrefler B.A., «A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surface by no-compression material model », *Communication in Applied Numerical Methods*, vol. 4, 1988, p. 5-15.
- [CRI 91] Crisfield M.A., « Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures », (volume1). John Wiley & Sons: England 1991.
- [LAM 92] Lam W.F., Morley C.T., « Arc-length method for passing limit points in structural calculation », *Journal of Structural Engineering*, vol. 118, 1992, p. 19-185.
- [MIY 00] Miyamura T., « Wrinkling on stretched circular membrane under in-plane torsion: bifurcation analyses and experiments », *Engineering Structures*, vol. 23, 2000, p. 1407-1425.
- [SHI 96a] Shi J., Moita G.F., «The post-critical analysis of axisymmetric hyper-elastic membranes by the finite element method», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 135, 1996, p. 265-281.
- [SHI 96b] Shi J., «Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method», *Computers and Structures* vol. 58, 1996, p. 203-220.
- [STA 03] Stanuszek M., « FE analysis of large deformations of membranes with wrinkling », *Finite Elements. in Analysis and Design*, vol. 39, 2003, p. 599-618
- [SZY 87] Szyszkowski W., « Glockner G. Spherical membranes subjected to vertical concentrated loads: an experimental study », *International Journal of Engineering Structures*, vol. 9, 1987, p. 183-192.
- [TESS 03] Tessler A., Sleight D.W., « Wang JT. Nonlinear shell modelling of thin membranes with emphasis on structural wrinkling », *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural dynamics, and Materials Conference*, Norfolk, Virginia, AIAA 2003-1931.